
Représentations linéaires de groupes finis

Geoffrey Deperle

Table des matières

1	Généralités sur les représentations linéaires	2
1.1	Définitions et premiers théorèmes	2
1.2	Caractère d'une représentation	5
1.3	Construction de représentation	8
1.4	Application : Représentations irréductibles de S_3 et S_4	9
2	Transformée de Fourier, convolution et application	12
2.1	Transformée de Fourier et convolution	12
2.2	Application : Modèle des transpositions aléatoires	13
3	Construction de représentation irréductible du groupe symétrique	16
3.1	Tableaux de Young	16
3.2	Construction de représentations de S_n	17
3.3	Application : Représentations irréductibles de S_4 et S_5	21

Introduction

1 Généralités sur les représentations linéaires

Dans toute la suite, G désignera un groupe fini d'élément neutre 1 et V un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

1.1 Définitions et premiers théorèmes

1.1.1 Représentations et morphismes

Définition 1. On appelle **représentation linéaire de G sur V** un morphisme $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$. C'est-à-dire qu'à tout élément $g \in G$, on associe un automorphisme ρ_g de V vérifiant $\forall g, g' \in G, \rho_{gg'} = \rho_g \circ \rho_{g'}$

Remarque 2. Comme ρ est un morphisme de groupe, on a les relations suivants :

- $\rho_1 = \text{id}$
- $\forall g \in G, \rho_{g^{-1}} = \rho_g^{-1}$

Définition 3. On appelle **degré** d'une représentation ρ la dimension de V .

Exemple 4.

1. Considérons $\mathbb{C}[G]$ l'espace vectoriel de dimension $|G|$ dont une base $(e_g)_{g \in G}$ est indexée par G . En associant à $s \in G$ l'application ρ_s qui envoie e_g sur e_{sg} , on définit une représentation du groupe G sur V de degré $|G|$ appelée **représentation régulière de G**
2. Plus généralement, si G opère sur un ensemble fini X et V un espace vectoriel dont une base $(e_x)_{x \in X}$ est indexée par X . En associant à $s \in G$ l'application ρ_s qui envoie e_x sur $e_{s \cdot x}$, on définit une représentation du groupe G sur V appelée **représentation de permutation associé à X**

Exemple 5 (Représentation du groupe diédral). Considérons le groupe diédral $\mathcal{D}_{2n} = \langle r, s \rangle$ d'ordre $2n$. L'application $\rho : \mathcal{D}_{2n} \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{R})$ tel que ρ_r et ρ_s a pour matrice dans la base canonique

$$M_r = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \end{pmatrix} \text{ et } M_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

définit une représentation du groupe diédral de degré 2.

Définition 6. Soit V, V' deux espaces vectoriels et ρ (resp. ρ') une représentation de G sur V (resp. V'). $f : V \rightarrow V'$ une application linéaire. On dit que f est un **morphisme de représentation** (ou que f est G -équivariante) si $\forall g \in G, \rho'_g \circ f = f \circ \rho_g$. C'est-à-dire une application linéaire f tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V' \\ \rho_g \downarrow & & \downarrow \rho'_g \\ V & \xrightarrow{f} & V' \end{array}$$

On note $\text{Hom}_G(V, V')$ l'espace vectoriel des morphismes de représentations de V vers V' . Deux représentations $(V, \rho), (V', \rho')$ sont dites isomorphes si il existe un automorphisme de représentation de V vers V' .

G agit sur $\mathcal{L}(V, V')$ par l'action $g \cdot f = \rho'_g \circ f \circ \rho_g^{-1}$ qui définit une représentation de G sur $\mathcal{L}(V, V')$. L'ensemble des morphismes de représentations constitue alors l'ensemble des points fixes de cette action.

Exemple 7. Toute homothétie de (V, ρ) est un endomorphisme de représentation de V . En effet, pour $f = \lambda \text{id}$, on a $\forall x \in V, g \in G, \rho_g^{-1} \circ f \circ \rho_g(x) = \lambda \rho_g^{-1}(\rho_g(x)) = \lambda x = f(x)$

Proposition 8. Soit V, V' deux espaces vectoriels, ρ (resp. ρ') une représentation de G sur V (resp. V'). $f : V \rightarrow V'$ une application linéaire. L'application $f^0 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho'_g \circ f \circ \rho_g$ est un morphisme de représentation de V sur V' .

Preuve : Il suffit de vérifier que pour tout $s \in G$, f^0 vérifie $\rho'_s \circ f^0 \circ \rho_s = f^0$.
Soit $s \in G$,

$$\begin{aligned} \rho'_s \circ f^0 \circ \rho_s &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho'_s \circ \rho'_g \circ f \circ \rho_g \circ \rho_s \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho'_{gs} \circ f \circ \rho_{gs} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho'_g \circ f \circ \rho_g \quad \text{En ré-indexant la somme} \\ &= f^0 \end{aligned}$$

Donc f^0 est un morphisme de représentation. □

1.1.2 Sous-représentations

Définition 9. Soit W un sous-espace vectoriel de V . Si W est stable par ρ_g pour tout $g \in G$, alors la restriction de ρ_g sur W définit une représentation de G sur W . On dit alors que W est une **sous-représentation** de V .

Exemple 10. Soit (V, ρ) la représentation régulière de G . L'espace vectoriel $W = \text{Vect} \left(\sum_{g \in G} e_g \right)$ est stable par ρ_s pour tout $s \in G$. Ainsi, W est une sous-représentation de V de degré 1.

Proposition 11. Soit $(V, \rho), (V', \rho')$ deux représentations de G et f un morphisme de représentation de V vers V' . $\text{Ker} f$ (resp. $\text{Im} f$) est une sous-représentation de V (resp. V')

Preuve : Montrons le seulement pour $\text{Ker} f$.
Il suffit de montrer que pour tout $s \in G, \rho_s(\text{Ker} f) = \text{Ker} f$. On a pour $x \in \rho_s(\text{Ker} f)$, il existe

$x' \in \text{Ker } f$ tel que $x = \rho_s(x')$ d'où $f(\rho_s(x')) = \rho'_s(f(x')) = 0$ d'où l'inclusion. Soit $x \in \text{Ker } f$, alors $x = \rho_s(\rho_{s^{-1}}(x))$ et $\rho_{s^{-1}}(x) \in \text{Ker } f$ par le même argument. \square

Théorème 12 (de Maschke). *Soit (V, ρ) une représentation de G et W une sous-représentation de V . Il existe une sous-représentation W^0 tel que $V = W \oplus W^0$.*

Preuve : Soit W' un supplémentaire quelconque de W dans V . Notons $p : V \rightarrow W$ la projection sur W parallèlement à W' . Posons $p^0 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_g^{-1} \circ p \circ \rho_g$.

Pour $x \in W$, $\rho_g(x) \in W$ par hypothèse donc $\rho_g^{-1} \circ p \circ \rho_g(x) = x$. Ainsi, $\forall x \in W, p^0(x) = x$. p^0 est donc un projecteur sur W parallèlement à un certain supplémentaire $\text{Ker } p^0$. Comme de plus, p^0 est un morphisme de représentation. W^0 est une sous-représentation de V . \square

Définition 13. Soit (V, ρ) une représentation de G . On dit que V est une **représentation irréductible** si ses seuls sous-représentations sont $\{0\}$ et V .

Exemple 14.

1. Toute représentation de degré 1 est irréductible.
2. En notant $(e_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ la base canonique de \mathbb{C}^n . \mathbb{C}^n est une représentation du groupe symétrique S_n par la représentation qui à $\sigma \in S_n$ associe l'automorphisme qui à e_i envoie $e_{\sigma(i)}$. (Il s'agit de la représentation de permutation associée à $\llbracket 1, n \rrbracket$ avec l'action triviale du groupe symétrique sur $\llbracket 1, n \rrbracket$).
L'hyperplan $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C} \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}$ est une sous-représentation de \mathbb{C}^n . Elle est irréductible. En effet, on peut vérifier que pour tout $x \in H - \{0\}$, les σx engendrent H . Donc, si par l'absurde il existe une sous-représentation de H différente de $\{0\}$, alors elle contient un élément x non nul, donc contient H .

Proposition 15. *Soit G un groupe fini abélien, toute représentation irréductible de G dans E est de dimension 1.*

Preuve : Soit G un groupe abélien, les $\{\rho_g, g \in G\}$ forment une famille commutative et diagonalisables (car pour tout $g \in G$, ρ_g est annulé par $X^{|G|} - 1$ scindé à racines simples). Donc les $\{\rho_g, g \in G\}$ sont co-diagonalisables. En particulier, ils possèdent un vecteur propre $x \in E \setminus \{0\}$ en commun.

La droite vectorielle $\mathbb{C}x$ constitue alors une sous-représentation non nulle de (V, ρ) donc comme $V = \mathbb{C}x$ et est de dimension 1. \square

Proposition 16. *Toute représentation est somme directe de représentation irréductible.*

Preuve : Par récurrence sur la dimension de V . Si $\dim V = 1$, alors V est irréductible. Supposons que toute représentation de degré n est irréductible. Soit V une représentation de degré $n + 1$.

- Si V est irréductible, il n'y a rien à faire
- Sinon, il existe une sous-représentation W vérifiant $\dim W < \dim V$. D'après le théorème de Maschke, il existe une sous-représentation W^0 tel que $V = W \oplus W^0$. En appliquant l'hypothèse de récurrence à W et W^0 , on obtient une décomposition de V en somme de représentations irréductibles. \square

1.2 Caractère d'une représentation

1.2.1 Définitions

Définition 17. Soit (V, ρ) une représentation de G . On appelle **caractère de la représentation** l'application :

$$\begin{aligned} \chi &: G \rightarrow \mathbb{C} \\ g &\mapsto \text{tr}(\rho_g) \end{aligned}$$

Proposition 18. Soit (V, ρ) une représentation de G de caractère χ . Alors

1. $\chi(1) = \dim V$
2. $\forall g \in G, \chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$
3. $\forall g, h \in G, \chi(hgh^{-1}) = \chi(g)$

Preuve :

1. $\chi(1) = \text{tr}(\text{id}) = \dim V$
2. Notons $n = |G|$, on a $\rho_g^n = \rho_{g^n} = \rho_1 = \text{id}$ donc le polynôme $X^n - 1$ annule ρ_g . En particulier, toutes les valeurs propres λ de ρ_g sont des racines de l'unité donc vérifient $\lambda^{-1} = \bar{\lambda}$.

$$\chi(g^{-1}) = \text{tr}(\rho_{g^{-1}}) = \text{tr}(\rho_g^{-1}) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(\rho_g)} \lambda^{-1} = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(\rho_g)} \bar{\lambda} = \overline{\sum_{\lambda \in \text{Sp}(\rho_g)} \lambda} = \overline{\chi(g)}.$$

3. $\chi(hgh^{-1}) = \text{tr}(\rho_{hgh^{-1}}) = \text{tr}(\rho_h \rho_g \rho_{h^{-1}}) = \text{tr}(\rho_g \rho_h \rho_{h^{-1}}) = \text{tr}(\rho_g) = \chi(g)$

□

1.2.2 Relation d'orthogonalité des caractères

Dans la suite, on posera pour ϕ, ψ deux fonctions de G dans \mathbb{C} . On pose :

$$\langle \phi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi(g) \overline{\psi(g)}$$

dont on peut vérifier qu'il s'agit d'un produit scalaire.

Lemme 19 (de Schur). Soit $(V, \rho), (V', \rho')$ deux représentations irréductibles de G .

$$\dim(\text{Hom}_G(V, V')) = \begin{cases} 1 & \text{si } V \text{ et } V' \text{ sont isomorphes} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Preuve : Supposons que V et V' ne sont pas isomorphes. Soit $f : V \rightarrow V'$ une application G -équivariante. $\text{Ker } f$ est une sous-représentation de V donc $\text{Ker } f \in \{\{0\}, V\}$ et f est une sous-représentation de V' donc $\text{Im } f \in \{\{0\}, V'\}$. Par l'absurde, si $\text{Im } f = V'$, alors si $\text{Ker } f = 0$, f est un isomorphisme de V vers V' . Donc f est l'application nulle.

Supposons que V et V' sont isomorphes, f_0 un isomorphisme de V vers V' . Soit f une application G -équivariante. L'application $f_0^{-1} \circ f$ est G -équivariante. Comme \mathbb{C} est algébriquement clos, $f_0^{-1} \circ f$ admet une valeur propre λ d'où $\text{Ker}(f_0^{-1} \circ f - \lambda \text{id}) \neq \{0\}$. Comme V est irréductible, on a $\text{Ker}(f_0^{-1} \circ f - \lambda \text{id}) = V$ d'où $f_0^{-1} \circ f = \lambda \text{id}$ donc $f = \lambda f_0$. D'où $\text{Hom}_G(V, V') = \text{Vect}(f_0)$

□

Lemme 20. Soit (V, ρ) une représentation de G . L'application

$$p : V \rightarrow V \\ x \mapsto \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_g x$$

est un projecteur sur V^G l'ensemble des points fixe sous l'action de G . En particulier

$$\dim V^G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_g$$

Preuve : p laisse invariant tous les éléments de V^G donc définit un projecteur sur V^G parallèlement $\text{Ker } p$.

$$\text{On a de plus } \dim V^G = \text{rg}(p) = \text{tr}(p) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_g \quad \square$$

Ainsi, comme en considérant la représentation de G sur $\mathcal{L}(V, V')$, on a

$$\dim(\text{Hom}_G(V, V')) = \dim(\mathcal{L}(V, V')^G) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi'_g \chi_{g^{-1}} = \langle \chi, \chi' \rangle.$$

Le lemme de Schur permet donc de conclure la proposition suivante :

Théorème 21. Si χ est le caractère d'une représentation irréductible, alors $\langle \chi, \chi \rangle = 1$. Si χ et χ' sont deux représentations de représentations irréductibles non isomorphes, alors $\langle \chi, \chi' \rangle = 0$.

1.2.3 Décomposition en représentations irréductibles

Les caractères permettent de caractériser les représentations.

Proposition 22. Deux représentations d'un groupe G sont isomorphes si et seulement si elles ont le même caractère.

Preuve : Soit V une représentation de G . V se décompose en produit de représentations irréductibles : $V = \bigoplus_{i=1}^k V_i^{n_i}$ avec $n_i \geq 0$ (éventuellement égal à 0). En notant χ_1, \dots, χ_k les caractères des représentations irréductibles de G . On a d'après le théorème précédent : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, n_i = \langle \chi, \chi_i \rangle$. Donc V est définie intrinsèquement. □

En particulier, si χ est un caractère irréductible, on a $\langle \chi, \chi \rangle = 1$.

Exemple 23. En considérant la représentation régulière $\mathbb{C}[G]$ de G . On a $\forall g \in G, \chi_{\mathbb{C}[G]}(g) = \begin{cases} |G| & \text{si } g = \text{id} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ Ainsi, en prenant une représentation $V = \bigoplus_{i=1}^k V_i^{n_i}$ avec les V_i les représentations régulières de G de caractère χ_i , on a

$$\langle \chi_i, \chi_{\mathbb{C}[G]} \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\mathbb{C}[G]}(g) \chi_i(g^{-1}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(\text{id}) = \dim(V_i).$$

En particulier, comme $\chi_{\mathbb{C}[G]} = \sum_{i=1}^k \langle \chi_i, \chi_{\mathbb{C}[G]} \rangle \chi_i$, on a en appliquant cette relation à id, la relation :

$$|G| = \sum_{i=1}^k \dim(V_i)^2.$$

1.2.4 Fonctions centrales

Définition 24. On dit qu'une fonction $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ est centrale si elle est constante sur les classes de conjugaison, c'est à dire, pour tout $g, h \in G$, $f(hgh^{-1}) = f(g)$

Exemple 25.

1. Les indicatrices des classes de conjugaisons sont des fonctions centrales
2. Les caractères des représentations de G sont des fonctions centrales.

L'ensemble des fonctions centrales définit un espace vectoriel dont la dimension est égal au nombre de classe de conjugaison de G .

Proposition 26. Soit f une fonction centrale définie sur G et V une représentation de G . La fonction

$$f_V : V \rightarrow V \\ x \mapsto \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) \rho_g x$$

est G -équivariante. Si de plus V est irréductible, alors c'est une homothétie de rapport $\frac{1}{\dim V} \langle f_V, \overline{\chi_V} \rangle$

Preuve : On a

$$\rho_h f_V \rho_h^{-1} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) \rho_h \rho_g \rho_h^{-1}(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(hgh^{-1}) \rho_{hgh^{-1}}(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) \rho_g(x)$$

D'après le lemme de Schur, dans le cas où V est irréductible, f_V est une homothétie de rapport

$$\lambda = \frac{1}{\dim V} \text{tr}(f_V) = \frac{1}{\dim V} \langle f_V, \overline{\chi_V} \rangle.$$

□

Proposition 27. Les caractères irréductibles de G forment une base orthonormée de l'ensemble des fonctions centrales.

Preuve : On a déjà que les caractères irréductibles forment une famille orthonormée. Il faut alors prouver qu'elles engendrent l'ensemble des fonctions centrales. Pour cela, montrons qu'une fonction centrale orthogonale aux conjugués des caractères irréductibles est nécessairement nulle.

Soit f une fonction centrale orthogonale aux conjugués des caractères irréductibles. D'après la proposition précédente, les applications f_{V_i} sont alors nulles pour les V_i représentations irréductibles. Donc pour toute représentation V , f_V est nulle.

En particulier pour $V = \mathbb{C}[G]$, on a $f_V(e_1) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) e_g = 0$ donc $\forall g \in G, f(g) = 0$. □

Cette proposition permet de dénombrer le nombre de représentation irréductible d'un groupe. En effet, la dimension de l'espace vectoriel des fonctions central est alors égal aux nombres de caractères irréductibles. Ainsi, le nombre de caractère irréductible est égal au nombre de classe de conjugaison de G .

1.3 Construction de représentation

1.3.1 Produit tensoriel

Proposition 28. Soit G_1, G_2 deux groupes finis ayant pour représentation $(V_1, \rho_1), (V_2, \rho_2)$. L'application :

$$\begin{aligned} \rho_{V_1 \otimes V_2} : G_1 \times G_2 &\rightarrow \text{GL}(V_1 \otimes V_2) \\ (g_1, g_2) &\mapsto (x \otimes y \mapsto (\rho_1(g_1)(x) \otimes \rho_2(g_2)(y))) \end{aligned}$$

définit une représentation linéaire de $G_1 \times G_2$ sur $V_1 \otimes V_2$

En particulier pour $G_1 = G_2$, le sous-groupe diagonal $\{(x, x) \mid x \in G\}$ induit une représentation linéaire sur $V_1 \otimes V_2$. Cela permet de construire des représentations à partir de représentations existantes.

Notons que comme pour $u \in \mathcal{L}(V, V), v \in \mathcal{L}(V', V')$, $\text{tr}(u \otimes v) = \text{tr}(u)\text{tr}(v)$, on a $\chi_{V_1 \otimes V_2} = \chi_{V_1}\chi_{V_2}$

Proposition 29. Supposons de plus que $(V_1, \rho_1), (V_2, \rho_2)$ sont irréductibles. Alors la représentation de $G_1 \times G_2$ sur $V_1 \otimes V_2$ est irréductible.

Preuve : Posons χ_1 et χ_2 les caractères des représentations sur V_1 et V_2 et χ le caractère de la représentation sur $V_1 \otimes V_2$. On a

$$\begin{aligned} \langle \chi, \chi \rangle &= \frac{1}{|G_1 \otimes G_2|} \sum_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} \chi((g_1, g_2)) \overline{\chi((g_1, g_2))} \\ &= \left(\frac{1}{|G_1|} \sum_{g_1 \in G_1} \chi(g_1) \overline{\chi(g_1)} \right) \left(\frac{1}{|G_2|} \sum_{g_2 \in G_2} \chi(g_2) \overline{\chi(g_2)} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc χ est irréductible. □

Dans le cas du produit tensoriel d'une représentation de degré 1 et d'une représentation irréductible, la représentation de G sur produit tensoriel est irréductible.

Proposition 30. Soit G un groupe fini, (V, ρ) une représentation irréductible, (V', ε) une représentation de degré 1. La représentation $(V \otimes V', \rho \otimes \varepsilon)$ de G est irréductible.

Preuve : Appliquons le critère d'irréductibilité :

$$\begin{aligned} \langle \chi_{\rho \otimes \varepsilon}, \chi_{\rho \otimes \varepsilon} \rangle &= \langle \chi_\rho \chi_\varepsilon, \chi_\rho \chi_\varepsilon \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \chi_\rho \chi_\varepsilon \overline{\chi_\rho \chi_\varepsilon} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \chi_\rho \overline{\chi_\rho} \times \chi_\varepsilon \overline{\chi_\varepsilon} \end{aligned}$$

Or, ε est de degré 1 donc $\chi_\varepsilon = \text{tr}(\rho_\varepsilon) = \rho_\varepsilon$. Comme G est un groupe fini, on a $(\rho_\varepsilon)^{|G|} = 1$ donc $\rho_\varepsilon \in \mathbb{U}_{|G|}$. En particulier $|\rho_\varepsilon|^2 = \chi_\varepsilon \overline{\chi_\varepsilon} = 1$. D'où :

$$\begin{aligned} \langle \chi_{\rho \otimes \varepsilon}, \chi_{\rho \otimes \varepsilon} \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \chi_\rho \overline{\chi_\rho} \\ &= 1 \quad \text{car } \rho \text{ est irréductible} \end{aligned}$$

□

1.3.2 Représentations induites

Soit H un sous-groupe de G . Soit (V, ρ) une espace de représentation de G .

Supposons que (W, ρ) soit une sous-représentation de V . Alors pour tout $h \in H, \rho_h W = W$. Ainsi, pour tout $s \in G, h \in H, \rho_{sh} W = \rho_s W$. Ainsi l'ensemble $\rho_s W$ ne dépend que de la classe à gauche de s modulo H .

Soit g_1, \dots, g_k un système de représentant de l'ensemble quotient G/H de sorte que $G = \bigsqcup_{i=1}^k g_i H$. Posons $V' = \bigoplus_{i=1}^k \rho_{g_i} W$. V' est une sous-représentation de (V, ρ) car les $\rho_{g_i} W$ sont des permutations entre elles.

On dit que V est induite par la représentation de H si $V = V'$

Définition 31. On dit que la représentation (V, ρ) de G est induite par une représentation (W, θ) de $H < G$ si V est de la forme $V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} W_\sigma$ avec W_σ des sous-espaces vectoriels de W .

Proposition 32. Soit (V, ρ) une représentation de G induite par (W, θ) de H . Soit R un système de représentation de G/H , alors pour tout $g \in G$, on a

$$\chi_\rho(g) = \sum_{\substack{r \in R \\ r^{-1}gr \in H}} \chi_\theta(r^{-1}gr) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{s \in G \\ s^{-1}gs \in H}} \chi_\theta(s^{-1}gs).$$

Preuve : On a $V = \bigoplus_{r \in R} \rho_r W$. Pour tout $g \in G, \rho_g$ permute les $\rho_r W$. Sa trace est alors égal à la somme des traces des endomorphismes induit par ρ_g sur les $\rho_r W$ que ρ_g laisse invariant. D'où

$$\chi_g = \text{tr}(\rho_g) = \sum_{\substack{r \in R \\ \rho_g(\rho_r W) = \rho_r W}} \text{tr}((\rho_g)|_{\rho_r W}).$$

Or $\rho_g(\rho_r W) = \rho_r W \iff r^{-1}gr \in H$ et pour $r^{-1}gr \in H, \rho_{r^{-1}gr} \rho_r = \theta(r^{-1}gr)$ donc $\text{tr}((\rho_g)|_{\rho_r W}) = \text{tr}(\theta(r^{-1}gr)) = \chi_\theta(s^{-1}gs)$.

De plus,

$$\sum_{\substack{s \in G \\ s^{-1}gs \in H}} \chi_\theta(s^{-1}gs) = \sum_{r \in R} \sum_{\substack{s \in rH \\ s^{-1}gs \in H}} \chi_\theta(s^{-1}gs).$$

Or, si $s \in rH$, il existe $h \in H$ tel que $s = rh$. D'où

$$\sum_{r \in R} \sum_{\substack{h \in H \\ h^{-1}r^{-1}grh \in H}} \chi_\theta(s^{-1}gs) = \sum_{r \in R} \sum_{\substack{h \in H \\ r^{-1}gr \in H}} \chi_\theta(s^{-1}gs) = |H| \sum_{\substack{r \in R \\ r^{-1}gr \in H}} \chi_\theta(r^{-1}gr).$$

d'où le résultat. □

1.4 Application : Représentations irréductibles de S_3 et S_4

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux représentations de S_n de dimension 1 :

La représentation triviale $t : \sigma \in S_n \mapsto \text{id}$ et la représentation signature $\varepsilon : \sigma \in S_n \mapsto \varepsilon(\sigma)\text{id}$. Le caractère de ces représentations sont respectivement constante égal à 1 et égal à la signature de la permutation. Ces deux représentations sont irréductibles car de degré 1 et non isomorphes. Déterminons pour S_3 et S_4 les autres représentations irréductibles.

1.4.1 Représentations irréductibles de S_3

Construisons la table de caractères de S_3 :

S_3 possède 3 classes de conjugaison : $C_1 = \{\text{id}\}$, $C_2 = \{(12), (13), (23)\}$, $C_3 = \{(123)\}$. S_3 admet donc 3 représentations irréductibles. Il reste donc une représentation irréductible (V, θ) de caractère χ_θ . Comme $1^2 + 1^2 + (\dim V)^2 = |S_3| = 6$, on a $\dim V = 2$.

En considérant la représentation $\mathbb{C}[S_3]$ de caractère $\chi_{\mathbb{C}[S_3]}$, on a $\chi_t + \chi_\varepsilon + 2\chi_\theta = \chi_{\mathbb{C}[S_3]}$ et $\chi_{\mathbb{C}[S_3]}(\text{id}) = 6$ et pour toute autre permutation σ , $\chi_{\mathbb{C}[S_3]}(\sigma) = 0$. D'où : D'où $\chi((12)) = 0$ et $\chi((123)) = -1$. Ceci donne la table de caractère de S_3 :

S_3	C_{id}	$C_{(12)}$	$C_{(123)}$
χ_t	1	1	1
χ_θ	2	0	-1
χ_ε	1	-1	1

La représentation V est en réalité la représentation de S_3 sur $H = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x + y = 0\}$ décrite dans l'exemple 4.

1.4.2 Représentations irréductibles de S_4

Comme S_4 possède 5 classes de conjugaisons : C_{id} l'identité, $C_{(12)}$ contenant les transpositions, $C_{(12)(34)}$ contenant les doubles transpositions, $C_{(123)}$ contenant les 3-cycles, $C_{(1234)}$ contenant les quatre cycles. Il y a donc 5 représentations irréductibles.

Construisons la table de caractère de S_4 : On sait que S_4 agit sur $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$ par permutation des coordonnées que l'on notera θ et que cette représentation est irréductible, calculons sa table de caractère. Posons

$$e_1 = (1, -1, 0, 0), e_2 = (1, 0, -1, 0), e_3 = (1, 0, 0, -1)$$

On a

$$M_{\text{id}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M_{(12)} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M_{(123)} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{(1234)} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, M_{(12)(34)} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où les caractères suivant :

$$\chi_\theta(\text{id}) = 3, \chi_\theta((12)) = 1, \chi_\theta((123)) = 0, \chi_\theta((1234)) = -1, \chi_\theta((12)(34)) = -1$$

Comme la représentation signature est de degré 1 et la représentation θ est irréductible, le produit tensoriel des deux représentations dont le caractère est donnée par $\chi_{\bar{\theta}} = \chi_\rho \chi_\varepsilon$ est irréductible.

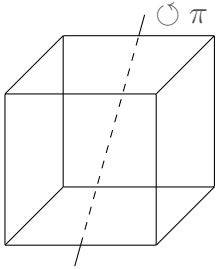
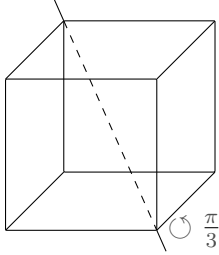
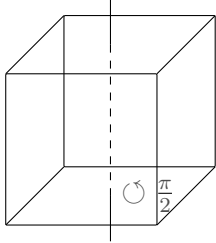
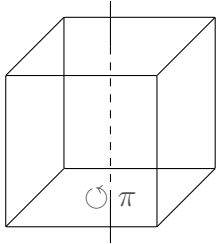
Il reste une représentation irréductible (V, ρ) , dont la relation $\sum_{k=1}^5 (\dim V_k)^2 = 24$ nous assure que $\dim V = 2$. Le caractère de cette représentation peuvent s'en déduire grâce à la relation

$$\forall g \in S_n, \chi_t(g) + \chi_\varepsilon(g) + 3\chi_\theta(g) + 3\chi_{\bar{\theta}}(g) + 2\chi_\rho(g) = \begin{cases} 24 & \text{si } g = \text{id} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On en déduit alors la table de caractère complète de S_4 :

S_3	C_{id}	$C_{(12)}$	$C_{(12)(34)}$	$C_{(123)}$	$C_{(1234)}$
χ_t	1	1	1	1	1
χ_θ	3	1	-1	0	-1
χ_ρ	2	0	2	-1	0
$\chi_{\tilde{\theta}}$	3	-1	-1	0	1
χ_ε	1	-1	1	1	-1

La représentation θ , peut se voir géométriquement. En effet, l'image de S_4 par θ peut se voir comme le sous-groupe de $O_3(\mathbb{R})$ laissant le cube invariant. Les éléments de S_4 agissent de la manière suivante :

<p>Transpositions (6 éléments) : Il s'agit d'une rotation d'angle π d'axe la droite passant par le milieu des arêtes reliant les diagonales.</p>	
<p>3-cycle (8 éléments) : Il s'agit d'une rotation autour de la diagonale D_i qui n'intervient pas dans</p>	
<p>4-cycle (6 éléments) : Il s'agit d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de l'axe passant par le centre de deux faces opposées.</p>	
<p>Double transpositions (3 éléments) : Il s'agit d'une rotation d'angle π autour de l'axe passant par le centre de deux faces opposées.</p>	

2 Transformée de Fourier, convolution et application

2.1 Transformée de Fourier et convolution

Soit f, g deux fonctions définies sur G à valeurs dans \mathbb{C} , on définit le produit de convolution $f \star g$ par

$$\forall s \in G, f \star g(s) = \sum_{t \in G} f(st^{-1})g(t).$$

Soit (V, ρ) un espace de représentation de G , on définit la transformée de Fourier de f comme l'endomorphisme :

$$\widehat{f}_\rho = \sum_{s \in G} f(s)\rho_s.$$

La transformée de Fourier est compatible avec le produit de convolution :

Proposition 33. *Soit f et g deux fonctions sur G à valeurs dans \mathbb{C} de représentation (V, ρ) , on a $\widehat{(f \star g)}_\rho = \widehat{f}_\rho \widehat{g}_\rho$*

Preuve :

$$\begin{aligned} \widehat{(f \star g)}_\rho &= \sum_{s \in G} (f \star g)(s)\rho_s \\ &= \sum_{s \in G} \sum_{t \in G} f(st^{-1})g(t)\rho_{st^{-1}}\rho_t \\ &= \sum_{s \in G} \sum_{u \in G} f(u)g(u^{-1}s)\rho_u\rho_{u^{-1}s} \\ &= \sum_{u \in G} f(u)\rho_u \sum_{s \in G} g(u^{-1}s)\rho_{u^{-1}s} \\ &= \left(\sum_{u \in G} f(u)\rho_u \right) \left(\sum_{v \in G} g(v)\rho_v \right) \\ &= \widehat{f}_\rho \widehat{g}_\rho \end{aligned}$$

□

Ainsi pour $k \in \mathbb{N}$, on a $\widehat{f^{*k}}_\rho = \widehat{f}_\rho^k$.

Proposition 34 (Formule d'inversion de Plancherel). *Soit f, g deux fonctions de G à valeurs dans \mathbb{C} , ρ^1, \dots, ρ^k les représentations irréductibles de G de dimension respectives d_1, \dots, d_k . On a*

$$\begin{aligned} \forall s \in G, f(s) &= \sum_{i=1}^k d_i \operatorname{tr}(\rho_{s^{-1}}^i \widehat{f}_{\rho_i}). \\ \forall s \in G, \sum_{s \in G} f(s^{-1})g(s) &= \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^k d_i \operatorname{tr}(\widehat{f}_{\rho_i} \widehat{g}_{\rho_i}). \end{aligned}$$

Preuve : Comme la formule est linéaire en f , il suffit de montrer que les deux expressions coïncident sur une base de l'ensemble des fonctions de G dans \mathbb{C} . Pour $f(t) = \delta_{st} = \begin{cases} 1 & \text{si } s = t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, on a

$$\widehat{f}_\rho = \sum_{s \in G} \delta_{st}\rho_s = \rho_t$$

d'où le membre de droite est égale à

$$\sum_{i=1}^k d_i \operatorname{tr}(\rho_{s^{-1}}^i \rho_t^i) = \sum_{i=1}^k d_i \operatorname{tr}(\rho_{s^{-1}t}^i) = \sum_{i=1}^k d_i \chi_i(s^{-1}t) = \chi_{\mathbb{C}[G]}(s^{-1}t) = \delta_{ts}.$$

De même, il suffit de le montrer pour $f(s) = \delta_{st}$, il suffit donc de montrer que $g(t^{-1}) = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^n d_i \operatorname{tr}(\rho_t^i \widehat{g}_{\rho_i})$ ce qui est bien vérifiée. \square

Dans le cas des représentations irréductibles, la transformée de Fourier d'une fonction centrale vérifie une propriété particulière :

Proposition 35. *Soit $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction centrale, et (V, ρ) une représentation de G . Alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $f = \lambda \operatorname{id}$. De plus, λ vérifie $\lambda = \frac{|G|}{d_\rho} \langle f, \overline{\chi_V} \rangle$*

Preuve : Pour $s \in G$,

$$(\rho_s)^{-1} \widehat{f}_\rho(\rho_s) = (\rho_s)^{-1} \sum_{t \in G} f(t) \rho_t \widehat{f}(\rho_s) = \sum_{t \in G} f(t) \rho_{s^{-1}ts} = \sum_{t \in G} f(sts^{-1}) \rho_t = \widehat{f}_\rho$$

car f est centrale. Ainsi, d'après le lemme de Schur, f est de la forme $f = \lambda \operatorname{id}$ avec

$$\lambda = \frac{1}{d_\rho} \operatorname{tr}(\widehat{f}) = \frac{1}{d_\rho} \sum_{t \in G} f(t) \chi_V(t) = \frac{|G|}{d_\rho} \langle f, \overline{\chi_V} \rangle$$

\square

Ainsi, si f est constant sur les classes de conjugaison, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^k = \lambda^k \operatorname{id}$ avec λ décrit plus haut.

2.2 Application : Modèle des transpositions aléatoires

Une application de la théorie des représentations du groupe symétrique est l'étude des marches aléatoires dans S_n . On s'intéresse au problème suivant : Étant donné un ensemble trié à n éléments, on s'intéresse au nombre minimum de transposition à appliquer pour que l'ensemble soit "bien mélangé".

Modélisons un mélange par une permutation de S_n . Comme chaque permutation se décompose en produit de transposition, on peut considérer ainsi un mélange comme un ensemble de transpositions.

Le problème consiste à estimer le nombre de transpositions aléatoires à appliquer pour avoir un mélange "uniforme".

Modélisons un mélange élémentaire par une probabilité P sur S_n définie par $P(\operatorname{id}) = \frac{1}{n}$ et pour toute transposition τ , $P(\tau) = \frac{2}{n^2}$ et $P(\sigma) = 0$ pour tout autre permutation σ .

Soit U la probabilité uniforme sur G , le problème étant de savoir quelle est le plus petit k vérifiant $d(P^{*k}, U) < \varepsilon$ pour un $\varepsilon > 0$ donné.

On considère sur l'ensemble des probabilités sur G la métrique $d(P, Q)$ de la distance en variation totale définie par $d(P, Q) = \max_{A \subset G} |P(A) - Q(A)|$

Remarque 36. La distance en variation totale s'exprime d'une autre manière, plus pratique :

$$d(P, Q) = \frac{1}{2} \sum_{s \in G} |P(s) - Q(s)|.$$

En effet, soit $B = \{s \in G \mid P(s) > Q(s)\}$. On a premièrement que pour toute partie $A \subset G$,

$$\begin{aligned} P(A) - Q(A) &= \sum_{s \in A} (P(s) - Q(s)) \\ &= \sum_{s \in A \cap B} (P(s) - Q(s)) + \underbrace{\sum_{s \in A \cap \bar{B}} (P(s) - Q(s))}_{\leq 0} \\ &\leq \sum_{s \in A \cap B} (P(s) - Q(s)) \\ &\leq \sum_{s \in B} (P(s) - Q(s)) = P(B) - Q(B) \end{aligned}$$

et de même, on a $P(A) - Q(A) \geq P(\bar{B}) - Q(\bar{B}) = -(P(B) - Q(B))$ d'où $|P(A) - Q(A)|$ atteint son maximum en B .

Ainsi,

$$\begin{aligned} 2d(P, Q) &= P(B) - Q(B) - (P(\bar{B}) - Q(\bar{B})) \\ &= \sum_{s \in B} (P(s) - Q(s)) - \sum_{s \notin B} (P(s) - Q(s)) \\ &= \sum_{s \in B} |P(s) - Q(s)| + \sum_{s \notin B} |P(s) - Q(s)| \\ &= \sum_{s \in G} |P(s) - Q(s)| \end{aligned}$$

d'où l'égalité.

Pour cela, nous nous appuyerons sur un lemme permettant d'estimer la distance d'une probabilité P et de la probabilité uniforme U .

Lemme 37. *Soit P une probabilité sur un groupe fini G , alors en notant $\text{Irr}(G)^*$ l'ensemble des représentations irréductibles non triviales on a :*

$$d(P, U)^2 \leq \frac{1}{4} \sum_{\rho \in \text{Irr}(G)^*} d_\rho \text{tr}(\hat{P}_\rho \overline{\hat{P}_\rho})$$

Preuve : On a

$$\begin{aligned} 4d(P, U)^2 &= (2d(P, U))^2 = \left(\sum_{s \in G} |P(s) - U(s)| \right)^2 \\ &\leq |G| \sum_{s \in G} |P(s) - U(s)|^2 \\ &= |G| \left(\sum_{s \in G} P(s)^2 + \sum_{s \in G} U(s)^2 - 2 \sum_{s \in G} P(s)U(s) \right) \\ &= |G| \left(\sum_{s \in G} P(s)^2 + \frac{1}{|G|} - \frac{2}{|G|} \right) \\ &= \sum_{\rho \in \text{Irr}(G)} \left(d_\rho \text{tr}(\hat{P}_\rho \overline{\hat{P}_\rho}) \right) - 1 \end{aligned}$$

Or pour la représentation triviale ρ , on a

$$d_\rho \text{tr}(\hat{P}_\rho \overline{\hat{P}_\rho}) = 1$$

d'où le résultat. \square

Comme P est constant sur les classes de conjugaison, on a $\widehat{P}^k = \lambda^k \text{id}$ avec $\lambda = \frac{1}{d_\rho} \sum_{t \in G} P(t) \chi_V(t) = \frac{1}{d_\rho} \left(\frac{1}{n} d_\rho + \frac{n(n-1)}{2} \frac{2}{n^2} \chi_V(\tau) \right)$ d'où

$$\widehat{P}^k = \left(\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} \frac{\chi_V(\tau)}{d_\rho} \right)^k \text{id}$$

$$\text{On a donc } \text{tr}(\widehat{P}_\rho \overline{\widehat{P}_\rho}) = d_\rho \left(\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} \frac{\chi_V(\tau)}{d_\rho} \right)^{2k}$$

Posons $r(\rho) = \frac{\chi_V(\tau)}{d_\rho}$, le lemme fournit une majoration de la distance entre P et U :

$$d(P^{*k}, U)^2 \leq \frac{1}{4} \sum_{\rho \in \text{Irr}(S_n)^*} d_\rho^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} r(\rho) \right)^{2k}$$

Notons que pour une transposition τ , on a $\rho_\tau^2 = \rho_{\tau^2} = \text{id}$, ainsi ρ_τ est une symétrie donc on a $|\text{tr} \rho_\tau| \leq \dim V = \text{tr} \rho_{\text{id}}$. Par l'absurde, si $\text{tr} \rho_\tau = \dim V$ alors par invariance de la trace sur les classes de conjugaisons, pour toute transposition τ , $\text{tr}(\rho_\tau) = \dim V$ donc pour toute transposition τ , $\rho_\tau = \text{id}$ donc comme les transpositions génèrent S_n , il s'agit de la représentation triviale. Donc $|r(\rho)| < 1$. Donc $\left(\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} r(\rho) \right) < 1$. Ainsi, la somme tend vers 0 lorsque $k \rightarrow +\infty$. Pour évaluer, la vitesse de convergence de la somme et établir à partir de quel k on a $d(P^{*k}, U)^2 < \varepsilon$, il faut étudier les $r(\rho)$ pour chaque représentation irréductible de S_n .

Pour $n = 4$, on dispose de :

Représentation ρ	d_ρ	$\chi_\rho(\tau)$	$r(\rho)$
χ_θ	3	1	$\frac{1}{3}$
χ_ρ	2	0	0
$\chi_{\tilde{\theta}}$	3	-3	-1
χ_ε	1	-1	-1

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \|P^{*k} - U\|^2 &\leq \frac{1}{4} \left(9 \left(\frac{1}{2} \right)^{2k} + 9 \left(-\frac{1}{2} \right)^{2k} + \left(-\frac{1}{2} \right)^{2k} \right) \\ &= \frac{19}{4} \frac{1}{2^{2k}} \\ \|P^{*k} - U\| &= \frac{\sqrt{19}}{2^{k+1}} \end{aligned}$$

Pour ε donné, on peut donc prendre $k \geq \frac{\ln(\frac{\sqrt{19}}{\varepsilon})}{\ln 2} - 1$

3 Construction de représentation irréductible du groupe symétrique

Dans toute la suite, n désignera un entier strictement positif. S_n le groupe symétrique, et ε l'application signature.

Il y a autant de représentation irréductible du groupe symétrique S_n que de classe de conjugaison, il y en a donc $p(n)$ (avec $p(n)$ le nombre de partition de l'entier n) car deux éléments de S_n sont conjugués si et seulement si leur décomposition en cycles à support disjoints contient le même nombre de k -cycle pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. La construction suivante, permet à partir d'une partition, de construire une représentation irréductible de S_n .

3.1 Tableaux de Young

3.1.1 Partition d'un entier

Définition 38. On dit que $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ est une partition de l'entier n si $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k$ et $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = n$.

Exemple 39. $\lambda = (5, 4, 4, 1)$ est une partition de 14

On peut représenter graphiquement une partition de n par un diagramme appelé **diagramme de Young** constitué d'un tableau dont la i^e ligne contient λ_i case(s) vide(s).

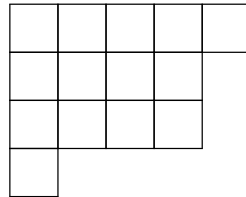


FIGURE 1 – Diagramme de Young pour $\lambda = (5, 4, 4, 1)$

Remarque 40. En notant $p(n)$ le nombre de partition de n , on peut montrer que la série entière $\sum_n p(n)x^n$ converge pour $x < 1$ et vérifie $\sum_{n=0}^{+\infty} p(n)x^n = \prod_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{1-t^k}$. Un résultat dû à

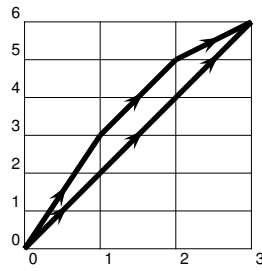
Hardy et Ramanujan montre que $p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)$

Définition 41. Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_l)$ deux partitions de n . On dit que λ majorise μ et on note $\lambda \supseteq \mu$ lorsque

$$\forall i \leq \min(k, l), \mu_1 + \dots + \mu_i \leq \lambda_1 + \dots + \lambda_i$$

Graphiquement, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \supseteq \mu = (\mu_1, \dots, \mu_l)$ si et seulement si la courbe constituée des lignes brisées reliant (i, λ_i) à $(i+1, \lambda_{i+1})$ se situe au dessus de la courbe constituée des lignes brisées reliant (i, μ_i) à $(i+1, \mu_{i+1})$.

Exemple 42. Pour $n = 6$, $\lambda = (2, 2, 1)$ majorise $\mu = (2, 1, 1)$ car $3 \geq 2$, $3 + 2 \geq 2 + 2$, et $3 + 2 + 1 \geq 2 + 2 + 2$.


 FIGURE 2 – $\lambda = (2, 2, 1) \supseteq (2, 1, 1) = \mu$

Définition 43. On dit qu'un tableau t est un λ -diagramme si t est un diagramme de Young associé à la partition λ dans lequel on a rempli les cases par des valeurs $1, \dots, n$ en plaçant une seule fois chaque nombre.

Exemple 44. Les tableaux $t =$

2	4	1	8	14
3	12	7	5	
11	10	9	6	
13				

 et $t' =$

1	2	3	4	5
6	7	8	9	
10	11	12	13	
14				

 sont des λ -tableaux pour $\lambda = (5, 4, 4, 1)$

Lemme 45. Soit λ, μ deux partitions de n , t un λ -tableau et t' un μ -tableau. Si pour tout i , les nombres de la i^e ligne de t sont dans des colonnes différentes de t' , alors $\lambda \supseteq \mu$

Preuve : Soit i une ligne de t , comme tous les éléments de la i^e ligne de t sont dans des colonnes différentes de t' , on peut permuter ces éléments pour les mettre dans les i^e ligne de t . Donc il y a forcément plus de cases dans la i^e ligne de t que dans la i^e ligne de t' . \square

3.2 Construction de représentations de S_n

3.2.1 Construction de M^λ

Fixons une partition λ de n ,

Le groupe symétrique S_n agit sur l'ensemble des λ -tableaux par permutation des éléments. Pour t un λ -tableau.

Posons C_t le sous-groupe de S_n laissant les colonnes invariantes.

Posons L_t le sous-groupe de S_n laissant les lignes invariantes.

Par exemple, pour $t =$

1	5	3
2	6	
4		

, on a $L_t \simeq S_{\{1,3,5\}} \times S_{\{2,6\}} \times S_{\{4\}}$ et $C_t \simeq S_{\{1,2,4\}} \times S_{\{5,6\}} \times S_{\{3\}}$

avec S_X le sous-groupe de S_n laissant invariant le sous-ensemble X de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Posons la relation d'équivalence sur les λ -tableaux t définie par $t_1 \sim t_2$ si et seulement si les lignes de t_1 et de t_2 comportent les mêmes éléments c'est à dire s'il existe $\sigma \in L_t$ tel que $t_1 = \sigma t_2$ (t_1 et t_2 appartiennent à la même orbite sous l'action de L_t).

Pour t un λ -tableau, on notera $\{t\}$ la classe d'équivalence de t pour cette relation d'équivalence (c'est un tableau dont les lignes sont non ordonnés) qu'on appellera **tabloïd**.

On notera pour t définie précédemment, $\overline{\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & \\ 4 & & \end{array}}$ le tabloïd $\{t\}$ associé à t .

Notons $\{t_1\}, \dots, \{t_k\}$ les différentes classes d'équivalence de \sim . On définit $M^\lambda := \mathbb{C}[\{t_1\}, \dots, \{t_k\}]$ l'espace vectoriel libre sur l'ensemble des tabloïds (l'espace vectoriel dont une base est indexée par $\{t_1\}, \dots, \{t_k\}$).

S_n agit sur les tabloïds avec : $\forall \sigma \in S_n, \sigma\{t\} = \{\sigma t\}$ qui ne dépend pas de l'élément t de la classe d'équivalence. Il s'ensuit la proposition suivante :

Proposition 46. *Pour toute partition λ , M^λ définit une représentation de S_n .*

Preuve : L_t est isomorphe à sous-groupe de S_n , et à chaque élément de M^λ , on peut associer un L_t , donc on peut associer à chaque élément de M^λ une permutation. Ainsi M^λ est isomorphe à une sous-algèbre de $\mathbb{C}[S_n]$ La relation $\forall \sigma \in S_n, \sigma\{t\} = \{\sigma t\}$ montre que M^λ est stable par σ , donc définit une sous-représentation de $\mathbb{C}[S_n]$. \square

Exemple 47.

— Pour $\lambda = (n)$, les λ -tableaux sont de la forme $\underbrace{\boxed{i_1} \dots \boxed{i_n}}_{n \text{ cases}}$ donc pour tous les λ -tableaux appartiennent à la même classe d'équivalence $\{t\}$, d'où $M^\lambda \simeq \mathbb{C}$.

— Pour $\lambda = (1, \dots, 1)$, les λ -tableaux sont de la forme $\begin{array}{c} \boxed{i_1} \\ \vdots \\ \boxed{i_n} \end{array}$ donc les classes d'équivalences sont des singletons, il y en a autant que de permutations de S_n d'où $M^\lambda \simeq \mathbb{C}[S_n]$

— Pour $\lambda = (n-1, 1)$, les λ -tableaux sont de la forme $\begin{array}{c} \boxed{i_1} \dots \boxed{i_{n-1}} \\ \boxed{i_n} \end{array}$ donc les λ -tableaux sont uniquement déterminés par l'élément i_n sur la deuxième ligne, il y a donc n classes d'équivalence. On a $M^\lambda \simeq \mathbb{C}^n$

Les M^λ définissent ainsi des représentations du groupe symétrique mais celles-ci ne sont pas forcément irréductibles.

3.2.2 Module de Specht et irréductibilité

Le but de cette sous-partie est de construire des sous-représentations irréductibles de M^λ . Posons

$$e_t = \sum_{\pi \in C_t} \varepsilon(\pi) \pi(\{t\}) \in M^\lambda$$

Exemple 48. Pour $t = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array}$ on a $\{t\} = \overline{\begin{array}{ccc} 1 & 3 & \\ 2 & 5 & 4 & \end{array}}$ et $C_t \simeq S_{\{1,2\}} \times S_{\{3,5\}} \times S_{\{4\}}$.

D'où $e_t = \overline{\begin{array}{ccc} 1 & 3 & \\ 2 & 5 & 4 & \end{array}} - \overline{\begin{array}{ccc} 2 & 3 & \\ 1 & 5 & 4 & \end{array}} - \overline{\begin{array}{ccc} 1 & 5 & \\ 2 & 3 & 4 & \end{array}} + \overline{\begin{array}{ccc} 2 & 3 & \\ 1 & 5 & 4 & \end{array}}$

Les vecteurs e_t possèdent quelques propriétés :

Proposition 49. *Pour tout $\sigma \in S_n$, $\sigma e_t = e_{\sigma t}$*

Preuve : On a $e_{\sigma t} = \sum_{\pi \in C_{\sigma t}} \varepsilon(\pi)\pi(\{\sigma t\})$. Or, en considérant la classe d'équivalence $[t]$ de t par la relation $t_1 \sim t_2$ si et seulement si les colonnes de t_1 et t_2 possèdent les mêmes nombres, on a comme précédemment $[\sigma t] = \sigma[t]$ d'où $\tau \in C_{\sigma t} \iff \tau[\sigma t] = [\sigma t] \iff \sigma^{-1}\tau\sigma[t] = [t] \iff \sigma^{-1}\tau\sigma \in C_t$. Ainsi, on dispose de l'égalité $C_{\sigma t} = \sigma^{-1}C_t\sigma$. En effectuant le changement de variable dans la somme $\pi' = \sigma\pi\sigma^{-1}$, on a

$$e_{\sigma t} = \sum_{\pi' \in C_t} \varepsilon(\pi')(\sigma\pi'\sigma^{-1})(\{\sigma t\}) = \sigma \sum_{\pi \in C_t} \varepsilon(\pi)\pi(\{t\}) = \sigma e_t$$

□

Ainsi, l'ensemble des e_t est stable par S_n et définit ainsi une sous-représentation de M^λ que l'on appelle **module de Specht** noté S^λ .

Exemple 50. Il est possible de retrouver des représentations connues à partir de partition simple de n .

- Pour $\lambda = (n)$, pour tout λ -tableau, l'espace S^λ est un sous-espace vectoriel de M^λ donc est de dimension 1 et est donc égal à 1 sur lequel $\forall \sigma \in S_n, \sigma e_t = e_{\sigma t} = e_t$ car tous les λ -tableaux sont équivalents. Donc la représentation S^λ est la représentation triviale de S_n .
- Pour $\lambda = (1, \dots, 1)$, on a $C_t = S_n$, d'où pour tout λ -tableaux,

$$\sigma e_t = \sum_{\pi \in S_n} \varepsilon(\pi)(\sigma\pi)(\{t\}) \stackrel{\tau=\sigma\pi}{=} \sum_{\tau \in S_n} \varepsilon(\sigma^{-1}\tau)(\tau)(\{t\}) = \varepsilon(\sigma) \sum_{\tau \in S_n} \varepsilon(\tau)(\tau)(\{t\}) = \varepsilon(\sigma)e_t$$

D'où comme $\pi e_t = e_{\pi t}$, S^λ est un espace vectoriel de dimension 1 sur lequel l'action de σ est $\varepsilon(\sigma)\text{id}$ d'où S^λ est la représentation signature.

- Pour $\lambda = (n-1, 1)$, il y a n tabloids que l'on notera t_1, \dots, t_n avec t_i possédant i sur sa deuxième ligne. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $t \in t_i$ un élément de la classe d'équivalence, $C_t \simeq S_{\{k, i\}}$ avec $k \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}$, la valeur de la première case de la première ligne (t est de la forme

$$t = \begin{array}{|c|c|c|} \hline k & ? & \dots & ? \\ \hline i & & & \\ \hline \end{array}. C_t \text{ contient donc deux éléments : l'identité et une transposition}$$

(ki) . On a donc $e_t = \{t\} - (ki)\{t\} = t_i - t_k$. Ainsi, S^λ est l'hyperplan H de M^λ définie par $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in M^\lambda \mid x_1 + \dots, x_n = 0\}$.

On peut montrer que ces représentations sont en réalité irréductibles. Pour cela, nous utiliserons le théorème du sous-module dont nous avons besoin d'un lemme pour pouvoir démontrer.

Lemme 51. *Soit t un λ -tableau et s un μ -tableau tels que $\sum_{\pi \in C_t} \varepsilon(\pi)\pi(\{s\}) \neq 0$. Alors $\lambda \supseteq \mu$, et si $\lambda = \mu$, alors la somme est égale à $\pm e_t$*

Preuve : Soit $a, b \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que a et b appartiennent à la même ligne dans s et à la même colonne de t .

Comme a et b appartiennent à la même colonne de t , $\langle \text{id}, (ab) \rangle$ est un sous-groupe de C_t . Soit

$$\sigma_1, \dots, \sigma_k \text{ tel que } C_t = \bigsqcup_{i=1}^k \sigma_i \langle \text{id}, (ab) \rangle.$$

On a

$$\begin{aligned} \sum_{\pi \in C_t} \varepsilon(\pi)\pi(\{s\}) &= \sum_{i=1}^k (\varepsilon(\sigma_k)\sigma_k(\{s\}) + \varepsilon(\sigma_k(ab))\sigma_k(ab)(\{s\})) \\ &= \sum_{i=1}^k \varepsilon(\sigma_k)\sigma_k(\{s\} - (ab)(\{s\})) \end{aligned}$$

Or, comme a et b appartiennent à la même ligne dans s , on a $(ab)\{s\} = \{s\}$ d'où $\{s\} - (ab)\{s\} = 0$ d'où la somme est nulle ce qui est contraire à l'hypothèse. Ainsi, pour tout a et b appartenant à la même ligne dans s , a et b n'appartiennent pas à la même colonne dans t donc d'après le lemme 3, on a $\lambda \geq \mu$.

Si de plus $\lambda = \mu$, alors comme d'après le cas précédent, les nombres des lignes de s appartiennent à des colonnes différentes de t , en les ré-ordonnant, il existe une application $\sigma \in C_t$ tel que $\sigma\{t\} = \{s\}$. Ainsi on a :

$$\sum_{\pi \in C_t} \varepsilon(\pi)\pi(\{s\}) = \sum_{\pi \in C_t} \varepsilon(\pi)\pi(\sigma\{t\}) \stackrel{\pi' = \pi\sigma}{=} \sum_{\pi' \in C_t} \varepsilon(\pi'\sigma^{-1})\pi'(\{t\}) = \underbrace{\varepsilon(\sigma)}_{\in \{\pm 1\}} e_t$$

□

Ainsi, en posant t un λ -tableau, pour tout $u \in M^\lambda$, comme u est combinaison linéaire d'élément de la forme $\{s\}$ et que $\sum_{\pi \in C_t} \varepsilon(\pi)\pi(\{s\})$ est colinéaire à e_t , alors $\sum_{\pi \in C_t} \varepsilon(\pi)\pi(u)$ est colinéaire à e_t .

Posons un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur M^λ définie sur la base des $\{t\}$ par $\langle \{t\}, \{s\} \rangle = 1$ si $\{t\} = \{s\}$ et 0 sinon. On a $\forall \sigma \in S_n$, $\langle \sigma\{t\}, \sigma\{s\} \rangle = \langle \{\sigma t\}, \{\sigma s\} \rangle = \langle \{t\}, \{s\} \rangle$ par bijectivité de σ : les éléments de S_n sont des isométries pour ce produit scalaire.

Théorème 52 (Théorème du submodule). *Soit U une sous-représentation de M^λ , alors $S^\lambda \subset U$ ou $U \subset S^{\lambda^\perp}$.*

Preuve : Soit U une sous-représentation de M^λ , alors soit $u \in U$, il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $\sum_{\pi \in C_t} \varepsilon(\pi)\pi(u) = ce_t$.

Si $c \neq 0$ alors par stabilité de U , on a $e_t \in U$ donc $S^\lambda \subset U$.

Si $c = 0$, alors

$$0 = \left\langle \sum_{\pi \in C_t} \varepsilon(\pi)\pi(u), \{t\} \right\rangle = \langle \pi(u), \sum_{\pi \in C_t} \varepsilon(\pi)\{t\} \rangle = \langle u, \left(\sum_{\pi \in C_t} \varepsilon(\pi)(\pi^{-1})\{t\} \right) \rangle = \langle u, e_t \rangle = 0$$

donc $U \subset S^{\lambda^\perp}$.

□

Ainsi, il en découle que les S^λ sont irréductibles.

Il reste à montrer que tous les S^λ sont non-isomorphes.

Soit λ et μ tel que S^λ et S^μ sont isomorphes, il existe un isomorphisme de représentation $T : S^\lambda \rightarrow S^\mu$.

On peut étendre T en un morphisme de représentation de $M^\lambda \rightarrow S^\lambda$ en posant $T = 0$ sur S^λ . $\text{Ker}(T)$ est alors une sous-représentation de M^λ donc d'après le théorème du sous-module : soit $S^\lambda \subset \text{Ker}(T)$ soit $\text{Ker}(T) \subset (S^\lambda)^\perp$. Si $S^\lambda \subset \text{Ker}(T)$ alors T est l'application nulle ce qui est

exclu. Donc $\text{Ker}(T) \subset (S^\lambda)^\perp$, d'où $Te_t \neq 0$.

Or,

$$Te_t = T \left(\sum_{\pi \in C_t} \varepsilon(\pi) \pi(\{t\}) \right) = \sum_{\pi \in C_t} \varepsilon(\pi) \pi(T(\{t\}))$$

car T est S_n -équivariant. Or, $(T(\{t\})) \in M^\mu$ donc en décomposant dans la base des $\{s\}$ des μ -tabloïd, on en déduit qu'il existe un tableau μ -tableau s tel que $\sum_{\pi \in C_t} \varepsilon(\pi) \pi(\{s\}) \neq 0$ donc

d'après un lemme précédent $\lambda \supseteq \mu$.

En ré-itérant avec T^{-1} on a $\mu \supseteq \lambda$ d'où $\lambda = \mu$.

Ainsi, les S^λ sont irréductibles.

Ainsi à chaque λ partition de n , correspond une représentation M^λ contenant une unique sous-représentation irréductible S^λ . Comme il y a $p(n)$ partition de n , qui est autant que de classe de conjugaison de S_n , on a construit ainsi toutes les représentations irréductibles de S_n .

3.3 Application : Représentations irréductibles de S_4 et S_5

Indexons l'ensemble des tabloïds avec la relation d'ordre totale suivante : Pour chaque tabloïd, il existe un unique tableau \tilde{t} dans chaque classe d'équivalence tel que la suite des nombres sur chaque ligne soit une suite croissante. Considérons alors la relation d'ordre totale sur les λ -tabloïd défini par $t_1 \leq t_2 \iff \tilde{t}_1 \preceq \tilde{t}_2$ avec \preceq l'ordre lexicographique sur les tableaux. Dans toute la suite on notera \mathcal{B}_λ la base de M^λ des tabloïds rangés selon l'ordre défini précédemment.

Pour calculer explicitement les représentations irréductibles de S_n pour n quelconque, j'ai développé un programme (dont le code est disponible en annexe) permettant de calculer numériquement les espaces M^λ et S^λ et de calculer explicitement les matrices de la représentation de chaque permutation sur S^λ .

3.3.1 Représentation irréductible de S_4

On a $p(5) = 7$, il y a donc 7 représentations irréductibles de S_5 . Construisons les différents ensembles S^λ pour λ des partitions non triviales de 5.

Notons $ii : t \mapsto e_t$, pour chaque partition λ , on a $S^\lambda = \text{Im}(\varphi)$ d'où $\dim S^\lambda = \text{rg}\varphi$. Étudions alors l'image de φ pour les différentes partitions de 5.

La représentation correspondant à la partition (3, 1) a déjà été étudiée. Il reste à étudier les représentations associées aux partitions (2, 2) et (2, 1, 1)

Pour $\lambda = (2, 2)$,

On a $\dim M^\lambda = \frac{4!}{2!2!} = 6$.

Numériquement, on trouve $\dim S^\lambda = 2$ et S^λ est engendré par les vecteurs (dont on donnera les coordonnées dans la base \mathcal{B}_λ :

$$e_1 = (-1, 0, 1, 0, -1, 1) \quad e_2 = (0, 1, -1, 1, 0, -1)$$

Dans la base \mathcal{B} les permutations agissent selon les matrices :

$$M_{(12)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, M_{(12)(34)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M_{(123)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, M_{(1234)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour $\lambda = (2, 1, 1)$,

On a $\dim M^\lambda = \frac{4!}{2!1!1!} = 12$.

Numériquement, on trouve $\dim S^\lambda = 3$ et S^λ est engendré par les vecteurs (dont on donnera les coordonnées dans la base \mathcal{B}_λ :

$$e_1 = (1, 0, -1, 1, 0, -1, 0, 1, -1, 0, 0, 0) \quad e_2 = (-1, 1, 0, 0, -1, 1, -1, 0, 0, 1, 0, 0) \quad e_3 = (0, -1, 1, -1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

Dans la base \mathcal{B} les permutations agissent selon les matrices :

$$M_{(12)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, M_{(123)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_{(1234)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M_{(12)(34)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On retrouve bien la table de caractère établie à la section 1.

3.3.2 Représentations irréductibles de S_5

On a $p(5) = 7$, il y a donc 7 représentations irréductibles de S_5 . Construisons les différents ensembles S^λ pour λ des partitions non triviales de 5.

Notons $\varphi : t \mapsto e_t$, pour chaque partition λ , on a $S^\lambda = \text{Im}(\varphi)$ d'où $\dim S^\lambda = \text{rg}\varphi$. En étudiant l'image de φ pour les différentes partitions de 5, on peut en déduire la table de caractère suivante :

Partition	C_{id}	$C_{(12)}$	$C_{(12)(34)}$	$C_{(123)}$	$C_{(123)(45)}$	$C_{(1234)}$	$C_{(12345)}$
(5)	1	1	1	1	1	1	1
(4, 1)	4	2	0	1	-1	0	-1
(3, 2)	5	1	1	-1	1	-1	0
(3, 1, 1)	6	0	-2	0	0	0	1
(2, 2, 1)	5	-1	1	-1	-1	1	0
(2, 1, 1, 1)	4	-2	0	1	1	0	-1
(1, 1, 1, 1, 1)	1	-1	1	-1	1	-1	1

On peut alors appliquer ce résultat pour évaluer la distance dans le modèle de transpositions aléatoires. Pour $n = 5$, on dispose de :

Partition associé à ρ	d_ρ	$\chi_\rho(\tau)$	$r(\rho)$
(4, 1)	4	2	$\frac{1}{2}$
(3, 2)	5	1	$\frac{1}{5}$
(3, 1, 1)	6	0	0
(2, 2, 1)	5	-1	$-\frac{1}{5}$
(2, 1, 1, 1)	4	-2	$-\frac{1}{2}$
(1, 1, 1, 1, 1)	-1	1	-1

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \|\mathbb{P}^{*k} - U\|^2 &\leq \frac{1}{4} \left(16 \left(\frac{3}{5} \right)^{2k} + 25 \left(\frac{9}{25} \right)^{2k} + 25 \left(\frac{1}{25} \right)^{2k} + 16 \left(-\frac{1}{5} \right)^{2k} + \left(-\frac{3}{5} \right)^{2k} \right) \\ &\leq \frac{83}{4} \left(\frac{3}{5} \right)^{2k} \end{aligned}$$